文章编号: 1006-8341(2003)03-0210-02

关于 F. Smarandache的第 64个问题

苟　素

(西安邮电学院 应用数理系, 陕西 西安 710061)

摘要: 设 $n\in \mathbf{N}^+$, $a(n)$表示 n的 k次剩余数,研究了 $a(n)$的均值,并利用解析的方法得到了 $a(n)$的一个渐近公式.

关键词: k次剩余;均值;渐近公式

中图分类号: O 156.4　　文献标识码: A

1 前言及引论

$\forall n\in \mathbf{N}^+$,显然 n可以唯一地表示为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,其中 $p_i\ (i=1,2,\cdots,k)$为不同的素数.设 $k\in \mathbf{N}^+$ 且 $k>1$, $a(n)$表示 n的 k次剩余数,即 $a(n)=\prod\limits_{1\le i\le n}p_i^{\beta_i}$,其中 $\beta_i=\min\{\alpha_i,k-1\}$.

在文献[1]中,罗马尼亚数论专家 F. Smarandache教授的第 64个问题中提出了研究数列 $a(n)$的性质,关于这一问题,至今没有看到任何进展.本文中利用解析的方法研究了 $a(n)$的均值性质,并得到一个有趣的渐近公式,即就是证明了下面的定理.

定理 1　$\forall x\in \mathbf{R}$,且 $x>1$,有渐近公式

$$\sum_{n\le x}a(n)=\frac{h(2)}{2}x^2+O(x^{(3/2)+\varepsilon}).$$

其中 $h(s)=\prod\limits_p\left(1-\dfrac{1}{p^{k-1}(1+p)}\right)$, $\prod\limits_p$表示对所有素数求积.

2 引理及定理 1的证明

为了完成定理 1的证明,首先引入下面引理

引理 1　设 $A(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}$, $\sigma_a<+\infty$,再设存在递增函数 $H(u)$及函数 $B(u)$使得

$$|a(n)|\le H(n),\ n=1,2,\cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a(n)|n^{-s}\le B(\sigma),\ \sigma\ge\sigma_a,$$

那末, $\forall s_0=\sigma_0+it_0$及 $b_0>\sigma_a$,当 $b_0\ge b>0$, $b_0\ge\sigma_0+b>\sigma_a$, $T\ge 1$及半奇数 $x\ge 1$时有

$$\sum_{n\le x}a(n)n^{-s_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}A(s_0+s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s+O\left(\frac{x^bB(b+\sigma_0)}{T}\right)+O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\left(1,\frac{\ln x}{T}\right)\right)+$$

---

* 收稿日期: 2003-04-15

基金项目: 陕西省自然科学基金资助项目(2002A11)

作者简介: 苟素(1972-),女,陕西省凤翔县人,西安邮电学院讲师,西北大学在读硕士研究生,主要从事数论方面的研究.

$$O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{T\|x\|}\right)\right),$$

其中　$N = x - 1/2, \|x\| = |N - x|$.

引理 1证明见文献 [2].

下面来证明定理 1,显然 $a(n)$ 是 n 的积性函数,因此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s} = \prod_p\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a(p^l)}{p^{ls}}\right) = \prod_p\left(\sum_{l=0}^{k-1}\frac{p^l}{p^{ls}} + \sum_{l=k}^{\infty}\frac{p^{k-1}}{p^{ls}}\right) =$$

$$\prod_p\left(\sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{p^{l(s-1)}} + p^{k-1}\sum_{l=k}^{\infty}\frac{1}{p^{ls}}\right) = \prod_p\left(\frac{1-(1/p^{k(s-1)})}{1-(1/p^{s-1})} + p^{k-1}\frac{(1/p^{ks})}{1-(1/p^{s})}\right) =$$

$$\prod_p\frac{1}{1-(1/p^{s-1})}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^{k(s-1)}} + p^{k-1}\frac{p^2}{p^{ks}-p^{(k-1)s}}\left(1-\frac{1}{p^{s-1}}\right)\right) =$$

$$\zeta(s-1)\prod_p\left(1+\frac{1-p}{p^{(k-1)(s-1)}(p^s-1)}\right).$$

记 $h(s) = \prod_p\left(1+\frac{1-p}{p^{(k-1)(s-1)}(p^s-1)}\right)$,显然 $h(s)$ 在 $\mathrm{Re}\, s \geqslant \frac{3}{2}$ 上绝对一致收敛,且 $h(s) \ll 1$ 因而 $h(s)$ 在 $\mathrm{Re}\, s > \frac{3}{2}$ 上有界且解析.

因为 $a(n) \ll n^{\varepsilon} = H(n)$,且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^{\sigma}} = \zeta(\sigma-1)h(\sigma) \ll 1 = B(\sigma)$　$(\sigma > 2)$,于是对 $b = 2+\varepsilon$, $T \geqslant 1$ 及半奇数 x,有

$$\sum_{n\leqslant x}a(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-iT}^{b+iT}\zeta(s-1)h(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s + O\left(\frac{x^b}{T}\right) + O\left(\frac{xH(2x)\ln x}{T}\right).$$

取 $a = 3/2+\varepsilon$,并改变积分路线,将积分移至 $a \pm iT$,此时经过被积函数的一级极点 $s = 2$,于是

$$\sum_{n\leqslant x}a(n) = \mathop{\mathrm{Res}}_{s=2}\left[\zeta(s-1)h(s)\frac{x^s}{s}\right] + \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{b-iT}^{a-iT} + \int_{a-iT}^{a+iT} + \int_{a+iT}^{b+iT}\right]\zeta(s-1)h(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s +$$

$$O\left(\frac{x^b}{T}\right) + O\left(\frac{xH(2x)\ln x}{T}\right).$$

其中

$$\left|\left(\int_{b-iT}^{a+iT} + \int_{a+iT}^{b+iT}\right)\zeta(s-1)h(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right| \ll \int_a^b|\zeta(\sigma+iT)|\frac{x^{\sigma}}{T}\mathrm{d}\sigma \ll \frac{x^b}{T} + \frac{x^aT^{1/6}}{T} \ll \frac{x^b}{T} \ll \frac{x^3}{T},$$

$$\left|\int_{a-iT}^{a+iT}\zeta(s-1)h(s)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right| \ll \left|\int_{a-iT}^{a+iT}\zeta(s-1)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right| \ll \int_{-T}^{T}\frac{|\zeta(1/2)-it)|}{|t|+1}x^a\mathrm{d}t \ll$$

$$x^a\int_0^T\frac{\ln(t+1)}{t+1}\mathrm{d}t \ll x^a\ln^2T \ll x^{(3/2)+\varepsilon}.$$

因此

$$\sum_{n\leqslant x}a(n) = \mathop{\mathrm{Res}}_{s=2}\left[\zeta(s-1)h(s)\frac{x^s}{s}\right] + O\left(\frac{x^3}{T}\right) + O(x^{(3/2)+\varepsilon}) + O\left(\frac{x^b}{T}\right) + O\left(\frac{xH(2x)\ln x}{T}\right) =$$

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{s=2}\left[\zeta(s-1)h(s)\frac{x^s}{s}\right] + O\left(\frac{x^3}{T}\right) + O(x^{(3/2)+\varepsilon}) + O\left(x^{1+\varepsilon}\frac{\ln x}{T}\right).$$

取 $T = x^{(1/2)+\varepsilon}$,则有

$$\sum_{n\leqslant x}a(n) = \mathop{\mathrm{Res}}_{s=2}\left[\zeta(s-1)h(s)\frac{x^s}{s}\right] + O\left(x^{(3/2)-\varepsilon}\right) + O(x^{(3/2)+\varepsilon}) =$$

$$\mathop{\mathrm{Res}}_{s=2}\left[\zeta(s-1)h(s)\frac{x^s}{s}\right] + O\left(x^{(3/2)+\varepsilon}\right).$$

容易知道 $\mathop{\mathrm{Res}}_{s=2}\left[\zeta(s-1)h(s)\frac{x^s}{s}\right] = \frac{1}{2}h(2)x^2$,其中 $h(2) = \prod_p\left(1-\frac{1}{p^{k-1}(p+1)}\right)$,定理 1证毕.

致谢: 对张文鹏教授的指导表示感谢!　(下转第 237页)

[3] 倪光炯,李洪芳.近代物理[M].上海:上海科学技术出版社, 1979. 146-150.
[4] 孙念台.近代物理学基础[M].北京:北京师范学院出版社, 1987. 246.

Reseach on the inner unity of basic formulas of the relativity and quantum mechanics

SONG Li-xun, YU Chang-feng, GAO Bin, ZHANG Chong-hui

(College of Science, Xi'an Univ. of Eng. Science and Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract There are interactions between elementary-paticle and vacuum, by using the energy-coupling relation between them, two new concepts about internal clock and external clock of elementary-particle are given, and from this, the basc formulas about the relativity and quantum mechanics are derived. Further and more deeply, the internal relations are revealed between the relativity and quantum mechanics through the study of elementary-particle.

Key words elementary-particle; vacuum; clock; harmonic oscillator

(上接第 211页)

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only problems not solutions[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.
[2] 潘承洞,潘承彪.解析数据论基础[M].北京:科学出版社, 1999.

On the 64 th problem of F. Smarandache

GOU Su

(Dept. of Applied Mathematics and Physics, Xi'an Inst. of Posts and Telecommunications, Xi'an 710061, China)

Abstract Let $n \in \mathbf{N}^{+}$, $a(n)$ be the k-th residues. The mean value of $a(n)$ was studied and an asymptotic formula was given by using the analytic methods.

Key words k-th residue; mean value; asymptotic formula